複数種虚探知発生下における捜索割当ゲーム (不確実性と意思決定数理の諸問題)

AUTHOR(S):

宝崎, 隆祐

数理解析研究所講究録 1373 巻 2004 年 203-212

複数種虚探知発生下における捜索割当ゲーム

防衛大学校・情報工学科　宝崎隆祐

Ryusuke Hohzaki

Department OF COMPUTER SCIENCE, NATIONAL DEFENSE ACADEMY

概要: This paper deals with a two-person zero-sum game called *search allocation game* of a searcher and an evader, taking account of false contacts. The searcher distributes his searching effort in a search space to detect the evader. The evader is moving to avoid the searcher. As a payoff of the game, we take the total amount of the searching effort weighted by the evader's probability.

1. はじめに

捜索・逃避ゲームの一種である捜索割当ゲームとは，捜索空間上に手持ちの捜索資源を投入しつつ目標を探知しようとする捜索者と，同じ空間上を移動しつつ捜索者からの逃避を図る目標との間で行われるゲームである[5]．このような捜索・逃避問題の原型は，第２次大戦中の米海軍のＯＲ活動の理論的成果を纏めた B.O.Koopman[15] に見ることができる．彼は，ランダムな針路をとって一定速度で定点から拡散する目標の捜索について論じている．具体的な捜索オペレーションをモデル化したゲームの研究として，セル空間上で隣接セルにだけ移動可能な拡散目標の捜索に関する Meinardi[16] の研究や，対潜戦における航空機対潜水艦のゲームを扱った Danskin[2]，Baston and Bostock[1]，Garnaev[4] 等がある．潜水艦に対する航空機のように捜索者の運動能力が相対的に高く，任意の場所に移動して捜索可能であるという前提が捜索割当ゲームでは重要であり，もし捜索者と目標の運動能力の間に明らかな差がなければ，捜索者の戦略としては移動戦略の方がより興味のあるものとなる．このような場合を取り扱った研究として，Washburn[19] は１次元離散空間上で目標と捜索者の双方の移動を議論した．そこでは，両プレイヤーが同一セルを選択することによって生じる探知事象発生までの捜索者の総移動距離を支払いとする多段ゲームが議論されている．Kikuta[13] は捜索コストを支払いとした多段ゲームを，Eagle[3] は各時点で決まる個別支払いの時間累積を支払いとする１段階ゲームを研究した．一方，捜索資源配分を捜索者の戦略とする捜索割当ゲームの基本的なモデルは，潜伏地点を選択する静止目標に対するゲームであり，支払いとして探知確率や捜索利得をもつゲームの研究として Nakai[17] や Iida ら[10] の研究がある．さらに，そのモデルを移動目標へ拡張した研究として Hohzaki や Iida ら[6,7,11] がある．それらを一般化した数値解法は Hohzaki and Iida[8] において提案されている．これらの研究においては多数でない有限数の逃避経路のオプションが最初から設定されており，目標はそのうちのどれかを選択するという形での戦略を採っているものが多い．これに対し，任意のパス選択を可能にし，さらには目標の運動にエネルギー制約を加味した捜索割当ゲームの研究として，Washburn や Hohzaki ら[9,20] の研究がある．

以上述べてきた研究は，探知が真目標に対してのみ生じるモデルを扱ったものである．捜索者の期待に反して真ではない目標探知（虚探知）事象もしばしば生じ，それを扱ったものに虚探知モデルがある．通常，虚探知は広域捜索において生起し，その後の精密調査（精査）により真目標であるか虚目標

であるかが判定される２段階捜索のプロセスを踏む場合が多い．精査が通常の捜索を中断させるため，虚探知発生は捜索の障害となる．虚探知を引き起こす虚目標も真目標と同じく捜索空間に分布して存在すると考え，捜索における精査時間と捜索時間の和の期待値を最小にする捜索努力配分を論じたものに Stone ら[18] の研究がある．期待値を評価尺度としているため，捜索の２段階プロセスを陽に考慮に入れる必要がなく，真目標のみの最適捜索努力配分問題と本質的にはあまり変わらない．Kisi[14] は，実体のないノイズ等から引き起こされる虚探知がポアソン分布に従って定常的に発生する場合に，残り捜索時間に対して最適精査時間を決定する問題を取り扱っている．Kisi のモデルを更に精緻化したものに Iida ら[12] の研究があるが，精査による時間経過以外現在の捜索計画がその後の虚探知発生に影響を与える要素は考慮されておらず，虚探知発生の定常性を利用して捜索プロセスを再生過程として扱えることがその解法を容易にしている．以上のような虚探知モデルに関するこれまでの研究は捜索者側の最適捜索計画のみを扱っており，目標側の戦略も含めたゲームとして議論した研究は未だ無い．また，捜索者の戦略が虚探知発生や捜索プロセスの推移に与える影響を陽に考慮したモデルも皆無である．

以上のような研究経緯を踏まえ，本研究では，複数種類の虚探知発生を考慮した捜索割当ゲームを離散捜索空間上で取り扱う．また，捜索実施が虚探知発生確率に及ぼす影響も考慮する．

2. モデルの記述

捜索者と目標が参加する次の２人ゼロ和ゲームを考える．

(A1) 捜索空間は，離散セル空間 $\boldsymbol{K}=\{1,\cdots,n\}$ と離散時点 $\boldsymbol{T}=\{1,\cdots,T\}$ から成る．

(A2) 捜索者はこの捜索空間上へ捜索努力を配分することにより目標を探知しようと図るが，捜索は時点 τ 以降にしか開始できない．その捜索可能な時間帯を $\widehat{\boldsymbol{T}}\equiv\{\tau,\cdots,T\}\subseteq\boldsymbol{T}$ で表す．捜索努力量は非負であり，各時点 t で総量 $\Phi(t)$ の捜索努力が利用可能である．時刻 t にセル i に投入する捜索努力量を $\varphi(i,t)$ で表す．

(A3) 目標は捜索空間上に設定された１つのパスを事前に選択することにより捜索者からの逃避を図る．離散捜索空間において考えられるパス総数は n^T 個あるが，そのパス全体の集合を Ω で表す．その各々のパス $\omega\in\Omega$ の時点 $t=1,\cdots,T$ における位置はセル $\omega(t)$ である．パスにはいくつかの制約がある．まず，初期時点 $t=1$ でセル群 $S_0\subseteq\boldsymbol{K}$ のいずれかから出発する．時点 t にセル i にいる目標が，次の時点で移動できるセル群は $N(i,t)$ に限られており，これを時点 t におけるセル i の隣接セルと呼ぶ．また，セル i からセル j への移動にはエネルギー $\mu(i,j)$ が消費される．目標の所有する初期エネルギーは e_0 であり，移動によりこのエネルギーが消耗され尽くされた場合には，以後他のセルへは移動できず現在のセルに留まるほかない．

(A4) 捜索開始とともに虚探知事象が起こりうる．発生事象は各時点において独立に高々１回生じ，その発生確率は捜索努力量に依存する項とそれとは無関係な定常項から成り，捜索を実施した場合の時刻 t での虚探知発生確率は $q_t\equiv\sum_i\beta_i\varphi(i,t)+\gamma(t)$ により与えられる．パラメータ β_i はセル i における捜索努力が虚探知発生を引き起こす効率を，$\gamma(t)$ は定常発生率を表し，ともに非負の定数であるが，それらは $\max_i\beta_i\,\Phi(t)+\gamma(t)<1$ を満足するほど十分小さいものとする．虚探知には m 種類のクラスがあり，虚探知が発生した場合はそのいずれか１つの虚探知が生じており，それが k クラスの虚探知である確率は ρ_k である．したがって，$\sum_{k=1}^{m}\rho_k=1$ である．虚探知が発生した場合それを精査するための時間が必要となり，クラス k の虚探知に対する精査が終了し，元の捜索に復帰するのは t_k 時間後であるとする．クラス番号順に大きな精査時間を要し，$1<t_1<t_2<\cdots<t_m$ である．

(A5) 捜索者と目標は，上述した仮定及びパラメータの現実値を知った上で自らの戦略を捜索実施前に決定する．その後の捜索オペレーションの推移は次のとおりである．捜索者の捜索資源投入が始まる時点 τ までは，目標の移動のみが行われる．時点 τ 以後の各時点 t においては，捜索者による捜索がまず行われ，目標が探知されれば捜索は終了する．クラス k の虚探知が発生すればその精密調査に移行し，捜索者が次回の捜索へ復帰するのは時点 $t+t_k$

である．捜索者は，生じた探知事象が真目標の探知であるのか，虚探知であるのかは精密調査の後に確認できる．目標探知がなければ，目標はその時点 t の終わりにおいて移動を行う．終了時点 T での捜索完了によってもこの捜索ゲームは終了する．

$[\tau,T]$ 間でのいわゆるランダム捜索により生じる目標探知確率は，すべての時点で捜索が実施可能な場合，目標移動セル上に投入した捜索資源の重み付き総量により，通常 $P(\varphi,\omega)=1-\exp(-\sum_{t=\tau}^{T}\alpha_{\omega(t)}\varphi(\omega(t),t))$ で与えられる．ただし，ω は目標の移動パスであり，α_i はセル i の特性値である．この指数関数の肩にある重み付き総量を支払いとし，捜索者はこれを大きくするように，目標は小さくするように自らの戦略を採るものとする．

ここでの問題は，捜索者をマキシマイザー，目標をミニマイザーとする1段階の2人ゼロ和ゲームである．捜索者の純粋戦略は捜索努力配分 $\varphi=\{\varphi(i,t),i\in\boldsymbol{K},t\in\widehat{\boldsymbol{T}}\}$ であり，その実行可能性条件は，非負条件 $\varphi(i,t)\geq 0$ と努力量の総量制約 $\sum_{i\in\boldsymbol{K}}\varphi(i,t)\leq\Phi(t),t\in\widehat{\boldsymbol{T}}$ である．捜索努力配分に関するこの実行可能領域を Ψ で表わそう．一方，パス制約としては，出発セル制約，隣接セル制約及びエネルギー制約があるから，パス ω に関する実行可能性条件は

$$\omega(1)\in S_0,\omega(t+1)\in N(\omega(t),t),t\leq T-1,$$
$$\sum_{t=1}^{T-1}\mu(\omega(t),\omega(t+1))\leq e_0$$

と表すことができる．

虚探知が発生すればその精査の間捜索は実施されないため，ある時刻において捜索が実施できる確率はそれ以前における捜索努力投入に依存することになる．時刻 t における捜索実施可能確率 $S(t)$ は以下のように計算できる．初期時点 τ では捜索は必ず実施される．ある時刻 t 以前の時間区間 $[t-t_m+1,t-t_{m-1}]$ においてはクラス m の虚探知が発生すれば時刻 t での捜索は実施できない．同様に，時刻 $[t-t_{m-1}+1,t-t_{m-2}]$ においてクラス $m-1$ 以上の虚探知が発生すれば時刻 t での捜索は不可能となる．$t_0\equiv 1$ と定義してやれば，一般に，時間区間 $T_k=[t-t_k+1,t-t_{k-1}]$ においてはクラス k 以上の虚探知発生が時刻 t での捜索を妨げる．時間区間 T_k においてクラス k 以上の虚探知が発生すれば，それ以降 t までの間そのような虚探知は発生することはなく，時間区間 T_k でのクラス k 以上の虚探知発生事象は $k=m,m-1,\cdots,1$ に関し互いに排反である．以上から，捜索開始時間が τ であることに注意すれば，時刻 t での捜索実施可能確率 $S(t)$ は次式で計算できる．

$$\begin{aligned}S(t)&=1-\sum_{k=1}^{m}\sum_{\zeta=t-t_k+1,\zeta\geq\tau}^{t-t_{k-1}}S(\zeta)q_\zeta\sum_{l=k}^{m}\rho_l\\&=1-\sum_{l=1}^{m}\sum_{\zeta=t-t_l+1,\zeta\geq\tau}^{t-1}S(\zeta)q_\zeta\rho_l\\&=(1-q_{t-1})S(t-1)+\sum_{l\in L(t)}S(t-t_l)q_{t-t_l}\rho_l.\end{aligned}$$

ただし，$L(t)\equiv\{l\in\{1,\cdots,m\}\mid t-t_l\geq\tau\}$ とする．初期値を含め整理すると，$S(t)$ は次の漸化式により評価できる．

$$\begin{aligned}S(t)&=1,\ if\ t=\tau\\&=(1-q_{t-1})S(t-1)+\\&\quad\sum_{l\in L(t)}S(t-t_l)q_{t-t_l}\rho_l,\ if\ \tau+1\leq t.\end{aligned}\quad(1)$$

この $S(t)$ を使えば，捜索者が努力配分 φ を，目標がパス ω を採った場合の期待支払いは次式で与えられる．

$$R(\varphi,\omega)=\sum_{\zeta=\tau}^{T}S(\zeta)\alpha_{\omega(\zeta)}\varphi(\omega(\zeta),\zeta).\quad(2)$$

$S(t)$ は $\varphi(\cdot,\cdot)$ の線形式 q_ζ により計算されることから，$\{\varphi(i,\zeta),i\in\boldsymbol{K},\zeta<t\}$ の多項式となり，期待支払いの変数 φ に関する性質は明確ではない．ここでは，仮に捜索者に関しては純粋戦略 φ を，目標に関してはパス ω を選択確率 $\pi(\omega)$ でとる混合戦略 π を考え，(2) 式による期待支払い $R(\varphi,\pi)=\sum_\omega\pi(\omega)R(\varphi,\omega)$ をもつゲームについて以下議論してゆく．実は，このゲームは捜索者の捜索努力配分 φ と目標のパス選択戦略 π において均衡解を持つことを証明できる．そのために期待支払いのマックスミニ値及びミニマックス値を求め，両者が一致することを次節以降で示してゆく．また話を簡単にするため，エネルギー消費関数 $\mu(\cdot)$ 及び初期エネルギー e_0 は非負整数値をとるものとし，考えられるエネルギー状態全体を $\boldsymbol{E}=\{0,\cdots,e_0\}$ で表す．また，残存エネルギーを考慮した隣接セルを得るため，次を定義する．時刻 t にセル i にいて残存エネルギー e をもつ目標は，次の時点 $t+1$ に移動できる隣接

セル群として $N(i,t,e) \equiv \{j \in N(i,t) | \mu(i,j) \leq e\}$ をもつ．また，時刻 t にセル i へ残存エネルギー e をもって到着できる時点 $t-1$ での存在セル群は $N^*(i,t,e) \equiv \{j \in \boldsymbol{K} | i \in N(j,t-1,e+\mu(j,i))\}$ で定義できる．

3. 捜索者の最適捜索努力配分

目標の状態は，セル i，時間 t 及び残存エネルギー e により表すことができる．いま，捜索者の捜索努力配分 φ は与えられているものとしよう．$z(i,t,e)$ を，状態 (i,t,e) の目標が最適なパスを選択した場合に時刻 t 以後生じる期待支払いの最小，すなわち，t 以降で捜索が実施されたパス上に累積された重み付き捜索努力総量の期待値の最小値であるとする．このとき，期待支払いは (2) 式で与えられるから，$t \geq \tau$ に対し次式が成り立つ．

$$z(i,t,e) = \min_{j \in N(i,t,e)} \{S(t)\alpha_i\varphi(i,t) + z(j,t+1,e-\mu(i,j))\}. \quad (3)$$

ただし，$z(i,T+1,e)=0$ である．ここで，捜索努力配分 φ の実行可能性条件を再度確認しよう．

$$\sum_{i \in \boldsymbol{K}} \varphi(i,t) \leq \Phi(t),\ t \in \widehat{\boldsymbol{T}} \quad (4)$$

$$\varphi(i,t) \geq 0,\ i \in \boldsymbol{K},\ t \in \widehat{\boldsymbol{T}}\ . \quad (5)$$

目標は初期時点 $t=1$ でセル群 S_0 のいずれかに存在するから，目標の最適なパス選択による期待支払いの最小値は $\min_{i \in S_0} z(i,1,e_0)$ で与えられる．したがって，条件 (4),(5) や関係式 (1),(3) の下で $\max_\varphi \min_{i \in S_0} z(i,1,e_0)$ を実現する φ が捜索者の最適捜索努力配分に他ならず，そのときの目的関数値が期待支払いのマックスミニ値を与える．ただし，(3) 式にある $S(t)$ が $\{\varphi(i,\xi), i \in \boldsymbol{K}, \xi = \tau,\cdots,t-1\}$ の多項式であることを考えると，この最適化問題はそれほど簡単には解けない．そこで，この問題を次式で定義される変数 η, ζ により再度定式化することにしよう．

$$\eta(i,t) \equiv S(t)\varphi(i,t)/\Phi(t),$$

$$\zeta(t) \equiv S(t) - \sum_{i \in \boldsymbol{K}} \eta(i,t). \quad (6)$$

このとき，任意の $t \in \widehat{\boldsymbol{T}}$ に対し次のような関係が成り立つことは容易に分かる．

$$S(t)\varphi(i,t) = \Phi(t)\eta(i,t) \quad (7)$$

$$\sum_{i \in \boldsymbol{K}} \eta(i,t) + \zeta(t) = S(t)\ . \quad (8)$$

上式を用いて，更に次の式が得られる．

$$S(t)q_t = S(t)\left(\sum_i \beta_i\varphi(i,t) + \gamma(t)\right)$$

$$= \Phi(t)\sum_i \beta_i\eta(i,t) + \gamma(t)\left(\sum_i \eta(i,t) + \zeta(t)\right) \quad (9)$$

以上の準備のもと，上述したマックスミニ最適化問題を変数 $\eta(\cdot),\zeta(\cdot)$ により定式化しよう．

まず条件 (5) は同値な次式で置き換えられる．

$$\eta(i,t) \geq 0,\ i \in \boldsymbol{K},\ t \in \widehat{\boldsymbol{T}}\ .$$

また，$\Phi(t)\zeta(t) = S(t)(\Phi(t) - \sum_i \varphi(i,t))$ であるから，条件 (4) は次の条件と同値である．

$$\zeta(t) \geq 0,\ t \in \widehat{\boldsymbol{T}}\ .$$

$z(\cdot)$ に関する漸化式 (3) は，

$$z(i,t,e) = \min_{j \in N(i,t,e)} \{\alpha_i\Phi(t)\eta(i,t) + z(j,t+1,e-\mu(i,j))\}$$

のように書き換えられるが，時刻 $t=T$ 及び $t<\tau$ における自明な漸化式も加えると次のようになる．

$$\begin{aligned} &z(i,t,e) \\ &= \min_{j \in N(i,t,e)} z(j,t+1,e-\mu(i,j)) \quad (1 \leq t \leq \tau-1) \\ &= \min_{j \in N(i,t,e)} \{\alpha_i\Phi(t)\eta(i,t) \\ &\qquad + z(j,t+1,e-\mu(i,j))\} \quad (\tau \leq t \leq T-1) \\ &= \alpha_i\Phi(T)\eta(i,T) \quad (t=T). \end{aligned} \quad (10)$$

$S(t)$ に関する漸化式 (1) の右辺第２式は，式 (8),(9) 等を用いると，次のようになる．

$$\sum_i (1-\beta_i\Phi(t-1)-\gamma(t-1))\eta(i,t-1) +$$

$$(1-\gamma(t-1))\zeta(t-1) + \sum_{k \in L(t)} \rho_k \left\{\sum_i (\beta_i\Phi(t-t_k)\right.$$

$$\left. + \gamma(t-t_k))\,\eta(i,t-t_k) + \gamma(t-t_k)\zeta(t-t_k)\right\}.$$

もちろん，(1) 式の左辺 $S(t)$ は $\sum_i \eta(i,t) + \zeta(t)$ で置き換えられるから，右辺第１式は次式となる．

$$\sum_{i \in \boldsymbol{K}} \eta(i,\tau) + \zeta(\tau) = 1\ .$$

以上により，η, ζ による再定式化が完了した．逆に，導出した η, ζ に関する条件式に対し $S(t) =$

$\sum_i \eta(i,t)+\zeta(t)$, $\varphi(i,t)=\Phi(t)\zeta(i,t)/S(t)$ の逆の変換を施してやれば，漸化式 (1) や (4), (5) 式，その他の条件を導くことができ，元の問題が再現できる．以上から，期待支払いのマックスミニ値を与える問題は次の線形計画問題により定式化できる．

(P_S)　max δ

s.t.

$$z(i,1,e_0)\geq\delta,\ i\in S_0 \tag{11}$$

$$z(i,t,e)\leq z(j,t+1,e-\mu(i,j)),\ \ i\in\boldsymbol{K},\ j\in N(i,t,e), t\leq\tau-1, \mu(i,j)\leq e\leq e_0 \tag{12}$$

$$z(i,t,e)\leq\alpha_i\Phi(t)\eta(i,t)+z(j,t+1,e-\mu(i,j)),\ i\in\boldsymbol{K}, j\in N(i,t,e), t\leq T-1, \mu(i,j)\leq e \tag{13}$$

$$z(i,T,e)=\alpha_i\Phi(T)\eta(i,T),\ i\in\boldsymbol{K},\ e\in\boldsymbol{E} \tag{14}$$

$$\sum_{i\in\boldsymbol{K}}\eta(i,\tau)+\zeta(\tau)=1$$

$$\sum_{i\in\boldsymbol{K}}\eta(i,t)+\zeta(t)=\sum_{i\in\boldsymbol{K}}(1-\beta_i\Phi(t-1)-\gamma(t-1))\eta(i,t-1)+(1-\gamma(t-1))\zeta(t-1)+\sum_{k\in L(t)}\rho_k\left\{\sum_{i\in\boldsymbol{K}}(\beta_i\Phi(t-t_k)+\gamma(t-t_k))\times\eta(i,t-t_k)+\gamma(t-t_k)\zeta(t-t_k)\right\}, \tau+1\leq t$$

$$\eta(i,t)\geq 0,\ i\in\boldsymbol{K},\ t=\tau,\cdots,T$$

$$\zeta(t)\geq 0,\ t=\tau,\cdots,T\ .$$

この問題 (P_S) の最適解 η^*, ζ^* を用いれば，定義式 (6) から，捜索者の最適捜索努力配分は次式により与えられる．

$$\varphi^*(i,t)=\frac{\Phi(t)\ \eta^*(i,t)}{\sum_i\eta^*(i,t)+\zeta^*(t)}, i\in\boldsymbol{K}, t\in\widehat{\boldsymbol{T}}. \tag{15}$$

また，捜索実施可能確率 $S(t)$ は $\sum_i\eta^*(i,t)+\zeta^*(t)$ により計算できる．

最後に次のことを注意しておく．最適解では $\delta=\min_{i\in S_0} z(i,1,e_0)$ となるが，もし $z(j,1,e_0)>\delta$ なる $j\in S_0$ があった場合，この変数を $z(j,1,e_0)=\delta$ としても他の制約 (12)-(14) は依然として満足され，また最適値を変えることにもならない．逆に，制約式 (11) は等式の場合を含んでいるのであるから，不等式 (11) を次のように等式に変えた問題は (P_S) と同値である．

$$z(i,1,e_0)=\delta,\ i\in S_0\ . \tag{16}$$

また，$z(i,t,e)\geq 0$ となることは明らかであり，条件式 (11),(12) を考えれば，$i\notin S_0$ 及び $e\neq e_0$ に対する次のような条件を付加しても最適値には何ら影響を与えないことが分かる．

$$z(i,1,e_0)=0,\ i\notin S_0 \tag{17}$$

$$z(i,1,e)=0,\ i\in\boldsymbol{K},\ e\in\boldsymbol{E}-\{e_0\}\ . \tag{18}$$

4. 目標の最適移動戦略

2節のモデルでは目標の戦略を移動パスとその選択確率により定義した．実行可能なパス全体は場合によっては n^T 個もの総数をもち，実際の計算を行う際のデータ保持に要するメモリ制約等を考えれば，そのままの形で取り扱うことは極めて不便である．ここでは目標の移動戦略を捜索空間における存在確率や遷移確率により表すことでこの困難性を回避しよう．時刻 t でセル i に位置し残存エネルギー e を保有する状態 (i,t,e) に目標が存在する確率を $q(i,t,e)$ で表す．また，状態 (i,t,e) にいて，次の時点 $t+1$ でセル j に移動する遷移確率を $v(i,j,t,e)$ とする．これらの変数には仮定 (A3) による制約があるが，初期時点における存在確率や，存在確率と遷移確率間の確率保存則等を考慮した実行可能性条件を q,v について作ることは容易である．

いま，$q(\cdot),v(\cdot)$ は与えられているものとする．$h(t)$ を，時点 t で捜索が実施されるとした場合のそれ以降の最適な捜索努力配分による期待支払いの最大値を表すものとしよう．時刻 t ではセル i の捜索により $\alpha_i\varphi(i,t)\sum_{e\in\boldsymbol{E}}q(i,t,e)$ の期待支払いを得るが，クラス $k=1,\cdots,m$ の虚探知が確率 $q_t\rho_k$ で発生すれば次回の捜索は $t+t_k$ にしか再開できず，それ以降の期待支払いの最大は $h(t+t_k)$ となる．また，虚探知が発生しなければ $h(t+1)$ の期待支払いが見込まれる．以上から，$h(t)$ に関しては以下の漸化式が成り立つ．

$$h(t)=\max_{\varphi\in\Psi}\left\{\sum_{i\in\boldsymbol{K}}\alpha_i\varphi(i,t)\sum_{e\in\boldsymbol{E}}q(i,t,e)+(1-q_t)h(t+1)+\sum_{k=1}^{m}q_t\rho_k h(t+t_k)\right\}$$

$$=\max_{\varphi\in\Psi}\sum_i\varphi(i,t)\left\{\alpha_i\sum_e q(i,t,e)-\beta_i h(t+1)+\beta_i\sum_{k=1}^{m}\rho_k h(t+t_k)\right\}+(1-\gamma(t))h(t+1)$$

$$+\gamma(t)\sum_{k=1}^{m}\rho_k h(t+t_k).$$

φ の制約条件 (4), (5) 式を考えると，第 1 項の $\max_\varphi$ は，少なくとも 1 つのセル $i \in \boldsymbol{K}$ に対し中括弧 { } 内が正であれば，この中括弧内の値を最大にするセル i に対し，$\varphi(i,t)=\Phi(t)$, $\varphi(j,t)=0$, $i \neq j \in \boldsymbol{K}$ とすることにより得られ，そうでなければ 0 である．以上から，次の漸化式が成り立つ．

$$h(t)=\max\left[\max_{i\in\boldsymbol{K}}\left\{\Phi(t)\alpha_i\sum_{e\in\boldsymbol{E}}q(i,t,e)+(1-\beta_i\Phi(t)-\gamma(t))h(t+1)+(\beta_i\Phi(t)+\gamma(t))\sum_{k=1}^{m}\rho_k h(t+t_k)\right\},\ (1-\gamma(t))h(t+1)+\gamma(t)\sum_{k=1}^{m}\rho_k h(t+t_k)\right]. \quad (19)$$

したがって，次の不等式が成り立つ．

$$h(t)\geq\Phi(t)\alpha_i\sum_{e}q(i,t,e)+(1-\beta_i\Phi(t)-\gamma(t))\times h(t+1)+(\beta_i\Phi(t)+\gamma(t))\sum_{k=1}^{m}\rho_k h(t+t_k),\quad i\in\boldsymbol{K}, t\in\widehat{\boldsymbol{T}} \quad (20)$$

$$h(t)\geq(1-\gamma(t))h(t+1)+\gamma(t)\sum_{k=1}^{m}\rho_k h(t+t_k), t\in\widehat{\boldsymbol{T}}. \quad (21)$$

ただし，上式がすべての $t\in\widehat{\boldsymbol{T}}$ に適用できるように，$h(T+1)=\cdots=h(T+t_m)=0$ と約束する．

さて，目標は時点 τ 以降の捜索による $h(\tau)$ を最小にする戦略 $q(\cdot), v(\cdot)$ を採ろうとするから，期待支払いのミニマックス値は次の線形計画問題を解けばよい．ただし，記号 $M(t)\equiv\{k\in\{1,\cdots,m\}\mid t+t_k\leq T\}$ を使用している．

(P_T) min $h(\tau)$

s.t.

$$h(t)\geq\Phi(t)\alpha_i\sum_{e\in\boldsymbol{E}}q(i,t,e)+(1-\beta_i\Phi(t)-\gamma(t))\times h(t+1)+(\beta_i\Phi(t)+\gamma(t))\sum_{k\in M(t)}\rho_k h(t+t_k),\quad i\in\boldsymbol{K},\ t=\tau,\cdots,T-1 \quad (22)$$

$$h(T)\geq\Phi(T)\alpha_i\sum_{e\in\boldsymbol{E}}q(i,T,e),\ i\in\boldsymbol{K} \quad (23)$$

$$h(t)\geq(1-\gamma(t))h(t+1)+\gamma(t)\sum_{k\in M(t)}\rho_k h(t+t_k), t=\tau,\cdots,T-1 \quad (24)$$

$$h(T)\geq 0 \quad (25)$$

$$q(i,t,e)=\sum_{j\in N^*(i,t,e)}v(j,i,t-1,e+\mu(j,i)),\quad i\in\boldsymbol{K}, t=2,\cdots,T, 0\leq e\leq e_0-\mu(j,i) \quad (26)$$

$$q(i,t,e)=\sum_{j\in N(i,t,e)}v(i,j,t,e),\quad i\in\boldsymbol{K}, t=1,\cdots,T-1, e\in\boldsymbol{E} \quad (27)$$

$$\sum_{i\in S_0}q(i,1,e_0)=1 \quad (28)$$

$$\sum_{i\in\boldsymbol{K}}\sum_{e\in\boldsymbol{E}}q(i,1,e)=1 \quad (29)$$

$$v(i,j,t,e)\geq 0, i,j\in\boldsymbol{K}, t=1,\cdots,T-1, e\in\boldsymbol{E}.$$

条件 (22)-(25) 式は不等式 (20), (21) を書き下したものであり，条件 (26), (27) 式は目標の存在確率及び遷移確率の保存則から，(28) 式は目標の初期存在セルに関する条件からそれぞれ導かれる．条件 (29) 式が表している初期時点 $t=1$ における全存在確率 1 の制約は，確率保存則により，その後の時点でも保たれる．この問題を解くことにより目標の存在と移動に関する最適解 q^*, v^* が得られるが，容易にわかるように，実は目標の最適移動を表すには v^* だけで十分であり，q^* は冗長な変数ではある．

さて，問題 (P_S) と (P_T) が双対関係にあることを示すことができれば，捜索者の戦略 φ と目標の戦略 v によりゲームの均衡解が与えられることが証明される．証明の概略は以下のとおりである．問題 (P_T) の条件式 (22),(23) に双対変数 $\{\eta(i,t), i\in\boldsymbol{K}, t\in\widehat{\boldsymbol{T}}\}$ を，(24),(25) 式には $\{\zeta(t), t=\tau,\cdots,T\}$ を割り当てる．また，(26) 式に $\{z(i,t,e), i\in\boldsymbol{K}, t=2,\cdots,T, e\in\boldsymbol{E}\}$ を，(27) 式には $\{y(i,t,e), i\in\boldsymbol{K}, t=1,\cdots,T-1, e\in\boldsymbol{E}\}$ を双対変数とする．さらに，式 (28), (29) に変数 δ_1, δ_2 を対応させて双対問題を作成する．作成された等式条件から，双対変数 $y(i,t,e)$ は $z(i,t,e)$ で表すことができる．また，$z(i,1,e)$ は現れていないから，$i\in S_0$ に対しては $z(i,1,e_0)\equiv -y(i,1,e_0)$ とし，$i\notin S_0$ 及び $e\neq e_0$ に対しては $z(i,1,e)\equiv -y(i,1,e)-\delta_2$ と定義して，変数 $y(i,t,e)$ を削除する．さらに，$\delta\equiv\delta_1+\delta_2$ とおいて整理した問題は，問題 (P_S) に条件 (16)-(18) による修正を加えたものと一致する．したがってそれらの等しい最適値がゲームの値を与える．また，均衡解として，捜索者の最適戦略が問

題 (P_S) により，目標の最適戦略が (P_T) により求められることもこれで証明される．

5. 数値例

ここでは，具体的な数値例を用いることにより，捜索者及び目標の最適戦略の性質を考察する．

(1) 小さな虚探知発生率をもつ場合（ケース１）

10 セル，10 時点の捜索空間 $\boldsymbol{K} = \{1, \cdots, 10\}$，$\boldsymbol{T} = \{1, \cdots, 10\}$ において，初期時点でセル $S_0 = \{1\}$ から出発する目標への捜索を $\tau = 2$ から開始する．使用可能な捜索努力量は各時点で $\Phi(t) = 1$ であり，捜索努力はすべてのセルで同じ投入効果 $\alpha_i = 1$ をもつ．セル番号はセル 1 及び 10 を端点とする 1 次元セル空間上での位置を表しており，目標がセル i から移動可能な隣接セル群 $N(i,t)$ は，常にその 3 隣接セル $\{i-3, i-1, \cdots, i+3\} \cap \boldsymbol{K}$ であるとする．また，セル i, j 間の移動には距離 $|i-j|$ の 2 乗のエネルギー $\mu(i,j) = (i-j)^2$ が消費される．目標の初期保有エネルギーは $e_0 = 9$ である．このエネルギーを使用して時点 $t = 10$ までに達成できる最長距離は，各時間に 1 セルずつ移動してセル 10 に至る距離である．逆に，一時に達成できる最大移動距離は 3 セルであるが，この移動により初期エネルギー量 e_0 は消耗される．さらに，次のような虚探知発生の可能性が存在する．議論を簡単にするため虚探知発生確率の定常項は $\gamma(t) = 0$ とし，すべてのセル i で $\beta_i = 0.1$ とする．また，虚探知は 1 種類のみであり，必要とされる精査時間は $t_1 = 5$ である．このケースにおける目標の最適存在確率と捜索者の最適捜索努力配分はそれぞれ表 1-a，表 1-b となり，ゲームの値は 1.199 である．

目標はセル 1 から出発し，エネルギー制約及び移動可能隣接セルの制約を受けながらその存在領域を広げてゆき，前述したように時点 10 でセル 10 に到達する確率も存在する．目標にとっては，できるだけ広い存在領域にできるだけ一様に存在するよう移動することが期待支払いの低減化の目的に沿う．表 1-a からは，エネルギー制約により，存在領域の境界部分では存在確率が十分には一様となっていない様子が見られるが，同時に領域内部での一様化も特徴的である．捜索者の最適捜索努力配分である表 1-b からは，表 1-a に見られた一様分布性以上の戦略を読みとることができる．すなわち，存在領域の境界域に沿って逃げようとする目標をカバーするように境界領域に重きをおく時刻 $t = 5, 6$ での捜索と，早い段階で遠くへ逃げようとしたため内部に取り残された目標をカバーする時刻 $t = 9, 10$ でのセル 4 の重点捜索にその特徴がある．次に捜索実施可能確率 $S(t)$ を計算してみると，$S(2) \sim S(10)$ は $1, 0.9, 0.81, 0.729, 0.656, 0.691, 0.711, 0.721, 0.722$ となり，各時点においてそれほど大きな差はないため，捜索者，目標ともに捜索する可能性及び探知される可能性を常時考えて行動することとなる．

(2) 大きな虚探知発生率をもつ場合（ケース２）

ケース 1 に対し $\beta_i = 0.9$ とした場合，捜索実施可能確率 $S(2) \sim S(10)$ は図 1 のようになり，$S(2)$, $S(7)$ に比べると他の $S(t)$ の値はかなり低くなる．また，この場合のゲームの値も 0.452 と小さくなる．ゲームの解は表 2-a，2-b に示されている．

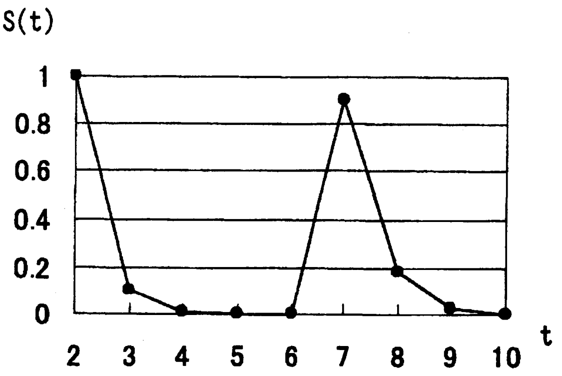

図1 捜索実施可能確率(ケース2)

このケースでは時点 $t = 5, 6$ において目標の最適存在確率の一様分布性に大きな乱れが見られる．しかし，上述した $S(t)$ の値から，そのような乱れが見受けられる時点では捜索がほとんど実施できないため，目標はその存在の一様性にこだわることなく，むしろ捜索実施確率の高くなるそれ以降に備えた移動を考えるべき期間だと言える．事実，$t = 7 \sim 10$ において完全な一様分布が実現されている．また，表 2-b の最適捜索努力配分の特徴として，内部セル 4 と目標存在圏の境界セルにおける重点捜索が相変わらず見受けられるものの，ケース 1 に比べより偏ったものとなっている．もちろん，時点 $t = 5, 6$ において投入する捜索努力には，目標探知に対する実質的な効果はほとんど期待できない．

(3) 複数クラスの虚探知発生（ケース３）

ケース 2 に対し，その発生割合が $\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\} = \{0.3, 0.4, 0.3\}$ である 3 種類の虚探知生起の場合を考える．また，必要とされる精査時間はそれぞれ

$\{t_1, t_2, t_3\} = \{3, 4, 5\}$ であるとする．この場合に得られる $S(t)$ の変化は図2のようになる．

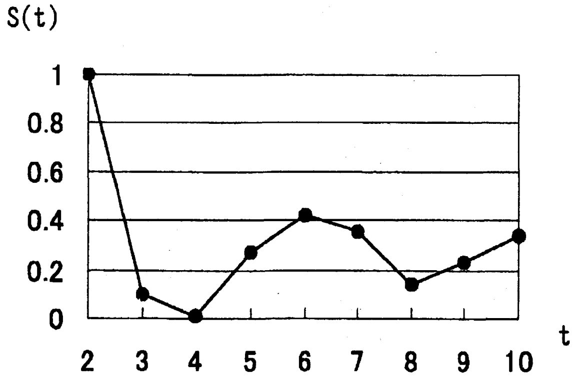

図2 捜索実施可能確率(ケース3)

複数虚探知の平均精査時間 $t_2 = 4$ の影響により，周期4の波形をもつ．この概容は，いわば周期5の変化をもつケース2の図1とは異なるがゆえに，その最適解も表3に記したように，表2とはかなり異なる．因みに，ケース2に比べ虚探知発生後の捜索復帰に要する時間の期待値が短くなった分ゲームの値は増加し，0.551となる．

6. おわりに

本論文では，捜索ゲームとしては初めて虚探知事象を考慮したモデルを提起し，その解法を提案した．一般に，離散捜索空間上での捜索割当ゲームは，捜索者の戦略に対しては連続ゲーム，目標の戦略に対しては離散で有限なゲームとなる．ここでは捜索者の戦略に関し線形な支払いを仮定したが故に，問題を線形計画問題として定式化できた．2節の問題のモデリングに際して述べたように，この仮定は，捜索モデルの基本的な評価尺度である目標探知確率そのものを扱うことが難しいことから，ある種の期待値を議論していることに相当する．通常，目標探知確率は捜索者，目標の戦略に対し非線形となることから，ここで得られた結果を非線形問題へと拡張することが，この研究の自然な次のステップとなる．

表1-a. 最適存在確率（ケース1）

Cells	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.029
9	0	0	0	0	0	0	0	0	.056	.027
8	0	0	0	0	0	0	.069	.125	.118	.118
7	0	0	0	0	0	.097	.133	.125	.118	.118
6	0	0	0	.086	.167	.151	.133	.125	.118	.118
5	0	0	.187	.183	.167	.151	.133	.125	.118	.118
4	0	.111	.203	.183	.167	.151	.133	.125	.118	.118
3	0	.296	.203	.183	.167	.151	.133	.125	.118	.118
2	0	.296	.203	.183	.167	.151	.133	.125	.118	.118
1	1	.296	.203	.183	.167	.151	.133	.125	.118	.118

Time

表1-b. 最適捜索努力配分（ケース1）

Cells	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	.055	.109	.124
7	0	0	0	0	0	0	.024	.032	.112	.121
6	0	0	0	0	.445	.232	.163	.152	.112	.121
5	0	0	0	.134	.297	.232	.163	.152	.112	.121
4	0	0	.250	.268	.163	.232	.163	.152	.219	.149
3	0	.333	.250	.200	.032	.102	.163	.152	.112	.121
2	0	.333	.250	.200	.032	.102	.163	.152	.112	.121
1	0	.333	.250	.200	.032	.102	.163	.152	.112	.121

Time

表2-a. 最適存在確率（ケース2）

Cells	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	.125	.125	.125	.125
7	0	0	0	0	0	.125	.125	.125	.125	.125
6	0	0	0	.125	.200	.175	.125	.125	.125	.125
5	0	0	.200	.175	.185	.165	.125	.125	.125	.125
4	0	.125	.200	.175	.200	.170	.125	.125	.125	.125
3	0	.292	.200	.175	.116	.100	.125	.125	.125	.125
2	0	.292	.200	.175	.150	.135	.125	.125	.125	.125
1	1	.292	.200	.175	.149	.131	.125	.125	.125	.125

Time

表2-b. 最適捜索努力配分（ケース2）

Cells	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	.061	.167	.368	.392
7	0	0	0	0	0	0	.094	.060	.047	.088
6	0	0	0	0	.9	1	.095	.061	.049	.106
5	0	0	.200	.182	0	0	.095	.060	.040	.024
4	0	0	.200	.272	.1	0	.370	.473	.377	.317
3	0	.333	.200	.182	0	0	.095	.060	.040	.024
2	0	.333	.200	.182	0	0	.095	.060	.040	.024
1	0	.333	.200	.182	0	0	.095	.060	.040	.024

Time

表3-a. 最適存在確率（ケース3）

Cells	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.008
9	0	0	0	0	0	0	0	0	.016	.022
8	0	0	0	0	0	0	.109	.125	.123	.121
7	0	0	0	0	0	.143	.127	.125	.123	.121
6	0	0	0	.061	.167	.143	.127	.125	.123	.121
5	0	0	.142	.188	.167	.143	.127	.125	.123	.121
4	0	.121	.214	.188	.167	.143	.127	.125	.123	.121
3	0	.293	.214	.188	.167	.143	.127	.125	.123	.121
2	0	.293	.214	.188	.167	.143	.127	.125	.123	.121
1	1	.293	.214	.188	.167	.143	.127	.125	.123	.121

Time

表3-b. 最適捜索努力配分（ケース3）

Cells	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	.307	.128	.012
7	0	0	0	0	0	.136	.085	.099	.125	.012
6	0	0	0	0	.218	.144	.153	.099	.125	.012
5	0	0	0	.226	.209	.144	.153	.099	.125	.012
4	0	0	.250	.451	.209	.144	.153	.099	.125	.914
3	0	.333	.250	.108	.121	.144	.153	.099	.125	.012
2	0	.333	.250	.108	.121	.144	.153	.099	.125	.012
1	0	.333	.250	.108	.121	.144	.153	.099	.125	.012

Time

参考文献

1) V.J. Baston and F.A. Bostock, A One-Dimensional Helicopter-Submarine Game, *Naval Research Logistics*, **36**, pp.479–490, 1989.
2) J.M. Danskin, A Helicopter versus Submarine Search Game, *Operations Research*, **16**, pp.509-517, 1968.
3) J.N. Eagle and A.R. Washburn, Cumulative Search-Evasion Games, *Naval Research Logistics*, **38**, pp.495–510, 1991.
4) A.Y. Garnaev, A Remark on a Helicopter-Submarine Game, *Naval Research Logistics*, **40**, pp.745-753, 1993.
5) A.Y. Garnaev, *Search Games and Other Applications of Game Theory*, Springer-Verlag, Tokyo, 2000.
6) R. Hohzaki and K. Iida, A Search Game with Reward Criterion, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **41**(4), pp.629–642, 1998.
7) R. Hohzaki and K. Iida, A Search Game When a Search Path Is Given, *European Journal of Operational Research*, **124**(1), pp.114–124, 2000.
8) R. Hohzaki and K. Iida, A Solution for a Two-Person Zero-Sum Game with a Concave Payoff Function, *Nonlinear Analysis and Convex Analysis*, World Science Publishing Co., London, pp.157–166, 1999.
9) R. Hohzaki, K. Iida and T. Komiya, Discrete Search Allocation Game with Energy Constraints, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **45**(1), pp.93–108, 2002.
10) K. Iida, R. Hohzaki and K. Sato, Hide-and-Search Game with the Risk Criterion, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **37**, pp.287–296, 1994.
11) K. Iida, R. Hohzaki and S. Furui, A Search Game for a Mobile Target with the Conditionally Deterministic Motion Defined by Paths, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **39**(4), pp.501–511, 1996.
12) K. Iida, R. Hohzaki and K. Kaiho, Optimal Investigating Search Maximizing the Detection Probability, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **40**(3), pp.294–309, 1997.
13) K. Kikuta, A Search Game with Traveling Cost, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **34**(4), pp.365–382, 1991.
14) T. Kisi, Optimal Stopping of the Investigating Search, *Search Theory and Applications*(NATO Conference Series II-8), pp.255–260, Plenum Press, N.Y., 1979.
15) B.O. Koopman, *Search and Screening*, Pergamon, pp.221-227, 1980.
16) J.J. Meinardi, A Sequentially Compounded Search Game, *Theory of Games: Techniquea and Applications*, The English Universities Press, London, pp.285–299, 1964.
17) T. Nakai, Search Models wiht Continuous Effort under Various Criteria, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **31**, pp.335–351, 1988.
18) L.D. Stone, *Theory of Optimal Search*, pp.136–178, Academic Press, N.Y., 1975.
19) A.R. Washburn, Search-Evasion Game in a Fixed Region, *Operations Research*, **28**, pp.1290-1298, 1980.
20) A.R. Washburn and R. Hohzaki, The Diesel Submarine Flaming Datum Problem, *Military Operations Research*, **6**, pp.19-33, 2001.